• FOLHA Nº 07 – GABARITO COMENTADO •

1) Se o resto da divisão de 247 por x é 7, então x divide 247 – 7 = 240
Da mesma maneira, x divide 315 – 3 = 312
O maior valor possível de x é o máximo divisor comum (MDC) de 240 e 312.
$240 = 2^4 . 3. 5$
$312 = 2^3 . 3 . 13$
MDC (240, 312) = $2^3 . 3 = 24$
Do mesmo modo, y divide 167 – 5 = 162 e 213 – 3 = 210
$162 = 2 . 3^4$
$210 = 2 . 3 . 5 . 7$
MDC (162, 210) = 2 . 3 = 6
O maior valor de x + y será 24 + 6 = 30

OPÇÃO C

2) Um número que ao mesmo tempo divisível por **5** e por **9**, é divisível também por **5 . 9**, ou seja, é divisível por **45**.
O número **61577** seria divisível por **45** se o resto da divisão fosse igual a zero, como não é, o que precisamos fazer então é subtrair de **61577** este resto, para que ele se torne um número divisível por **45**.
Você poderia ter interpretado o enunciado deste exercício como sendo: **Qual é o resto da divisão de 61577 por 45?**
61577 dividido por **45** é igual a **1368**, com um resto de **17**.
Logo:
• Devemos subtrair 17 de 61577 para que a diferença seja divisível ao mesmo tempo por 5 e por 9.

OPÇÃO C

3) $\frac{4}{17}.442 = \frac{1768}{17} = 104$

OPÇÃO A

4) 7 : 6 → resto 1
$7^2 : 6 \rightarrow$ resto 1
$7^3\ 6 \rightarrow$ resto 1
e assim por diante
$7^{12} :\ 6 \rightarrow$ resto 1
Logo $7^{12} = 6q + 1$ se continuarmos a divisão, então:
Temos que dividir o resto por seis, isto é, 1/6 = 1,1666...
Logo temos uma Dízima Periódica Composta.

OPÇÃO D

5) Como a soma dos números é 83, que é ímpar, um deles é ímpar. Sendo a única potência de 2 ímpar igual a 1, o menor número é 1.
OPÇÃO A

6) Se a afirmação falsa fosse de Cernaldo ou de Dernaldo, significaria que Arnaldo e Bernaldo fizeram afirmações verdadeiras. Mas se Bernaldo tivesse todas as cartas vermelhas, só haveria 3 números disponíveis para Arnaldo pegar. Então, a afirmação falsa só pode ser de Arnaldo ou de Bernaldo.

Se a afirmação falsa foi de Arnaldo, Bernaldo deve ter as 5 cartas vermelhas, então sobram as 5 cartas verdes para Cernaldo. Mas assim não há como Dernaldo possuir 3 cartas de um mesmo número. A afirmação falsa não pode ser de Arnaldo.

Se a afirmação falsa foi de Bernaldo, então podemos montar a seguinte tabela de cartas e assinalar a inicial de quem possui cada uma:

	1	2	3	4	5
Azul	A	B	B	D	D
Amarelo	A	B	B	D	D
Verde	A	C	C	B	D
Vermelho	A	C	C	C	A

Assim, só Bernaldo pode ter feito a afirmação falsa.

OPÇÃO B

7) A soma vale 7/2 e o produto vale 3/2, portanto a razão entre a soma e o produto vale:

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

OPÇÃO A

8) Como p e q são raízes, temos:

p + q = –b/a = 7/2

como 3p – q = 1/2, montamos o seguinte sistema:

3p – q = 1/2

p + q = 7/2, somando uma equação a outra temos:

4p = 4

p = 1

substituindo o valor de p na equação temos:

$2(1)^2 - 7.(1) + 2m - 3 = 0 \rightarrow 2 - 7 + 2m - 3 = 0 \rightarrow -5 + 2m - 3 = 0 \rightarrow 2m = 8 \rightarrow\ m = 4$

OPÇÃO E

9) Chamemos a primeira equação de $ax^2 + bx + c = 0$.

A segunda será $dx^2 + bx + c = 0$.

Para uma função de segundo grau temos que: $\frac{S}{P} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c}$

Portanto para ambas as equações a razão entre a soma e o produto das raízes não se alterou. Na segunda, como as raízes são 2 e 3, temos que: $\frac{S}{P} = \frac{2+3}{2.3} = \frac{5}{6}$, o que vale também para a primeira equação.

A terceira equação pode ser escrita como $ax^2 + bx + c = 0$.

Como a soma das raízes é definida por $\frac{-b}{a}$, esta será igual para a primeira e a terceira equação. Como são dadas as raízes da terceira equação, temos que: S = 2 + (–7) = –5. Portanto, como $\frac{S}{P} = \frac{5}{6}$, temos que o produto P das raízes é igual a –6. Portanto, sendo a soma –5 e o produto –6, as raízes serão –6 e 1.

1 – (–6) = 7.

OPÇÃO B

10) Como *p* não pode ser zero, podemos dividir a primeira equação por $-p^2$ e obter $\frac{1}{p^2} + 3\frac{1}{p} - 2.$ Isto nos diz que as raízes da primeira equação são os inversos das raízes da segunda equação. Como $pq \neq 1.$, p é igual ao inverso

da outra raíz da segunda equação que é diferente de q, ou seja, $p = \frac{1}{-3-q}$ pois a soma das raízes da segunda equação é igual a –3. Substituindo na expressão procurada:

$$\frac{pq+p+1}{q} = \frac{-q-1+3+q}{3q+q^2} = \frac{2}{3q+q^2} = \frac{2}{2} = 1$$

OPÇÃO A

11) Para que as soluções sejam inteiras, o discriminante da equação do segundo grau deve ser o quadrado de um inteiro positivo, digamos t^2. Assim

$$(r+s)^2 - 4rs - 4\times 2010 = t^2$$

$$(r-s)^2 - t^2 = 4\times 2010$$

$$\frac{((r-s)+t)}{2}\times\frac{((r-s)-t)}{2} = 2010$$

Como os números $((r-s)+t)$ e $((r+s)+t)$ possuem a mesma paridade e 2010 é inteiro, concluímos que os termos no produto anterior são inteiros. A cada para de divisores do tipo $\left(d, \frac{2010}{d}\right)$ do número 2010, temos uma solução para t e $|r-s|$ na última equação. Como 2010 possui 16 divisores, o número de soluções é 8

OPÇÃO E

12) $x^2 - mx + m - 1 = 0$

Raízes a, b

a x b = m – 1

$a + b = m \rightarrow (a+b)^2 = m^2 \rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = m^2 \rightarrow a^2 + b^2 = m^2 - 2ab$

$a^2 + b^2 = m^2 - 2 \times (m-1) \rightarrow a^2 + b^2 = m^2 - 2m + 2$

Vértice desta parábola : m = – (–2)/2 x 1 → m = 1

OPÇÃO D

13)

Edmilson	x	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}+10$	$\frac{x}{2}+12$
Eduardo	y	$y+\frac{x}{4}$	$y+\frac{x}{4}+10$	$y+\frac{x}{4}+8$
Carlos	z	$z+\frac{x}{4}$	$z+\frac{x}{4}-20$	$z+\frac{x}{4}-20$

A quantidade final de cada é R$ 50,00, então $\frac{x}{2}+12 = 50$, então E com isso, Eduardo tinha inicialmente R$ 23,00.

OPÇÃO C

14) Para x e y reais: $(x-y^2)^2 + (x-y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y^2=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ y^2-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ (y=-1 \text{ ou } y=2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x=1 \text{ e } y=-1) \\ \text{ou} \\ (x=4 \text{ e } y=2) \end{cases}$

OPÇÃO C

15) $k^2x - kx = k^2 - 2k - 8 + 12x$

$k^2x - kx - 12x = k^2 - 2k - 8$

$x\,(k^2 - k - 12) = (k - 4)\,.\,(k + 2)$

$x\,(k - 4)\,.\,(k + 3) = (k - 4)\,.\,(k + 2)$

$$x = \frac{(k-4).(k+2)}{(k-4).(k+3)}$$

$k - 4 \neq 0$

$K + 3 = 0 \rightarrow k = -3$

OPÇÃO B

16) $m^3 + n^3 = (-b/a)^3 - 3(-b/a).\left(\frac{c}{a}\right)$

$$m^3 + n^3 = -\frac{b^3}{a^3} + 3\,\frac{b.c}{a^2} = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$m^3\,.\,n^3 = (m\,.\,n)^3 = \frac{c^3}{a^3}$$

Toda equação pode ser escrita como $x^2 - Sx + P = 0$

$$x^2 - \frac{3abc - b^3}{(a^3)}\,x + \frac{c^3}{a^3} = 0$$

$a^3x^2 - b(3ac + b^2)x + c^3 = 0$

OPÇÃO A

17) Veja que $\alpha + \beta = 1$ e

$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 1,$

$\alpha^4 = \alpha \cdot \alpha^3 = \alpha(2\alpha + 1) = 2\alpha^2 + \alpha = 3\alpha + 2,$

$\alpha^5 = \alpha \cdot \alpha^4 = \alpha(3\alpha + 2) = 3\alpha^2 + 2\alpha = 5\alpha + 3.$

Analogamente,

$\beta^7 = \beta^4 \cdot \beta^3 = (5\beta + 3)(\beta + 1) = 5\beta^2 + 8\beta + 3 = 13\beta + 8.$

Portanto, $13\alpha^5 + 5\beta^7 = 13(5\alpha + 3) + 5(13\beta + 8) = 65(\alpha + \beta) + 79 = 65 + 79 = 144.$

OPÇÃO D

18) Ambas as equações tem 1 como raiz. As outras raízes são 1/2007 e 2007, cujo produto é 1.

OPÇÃO B

19) É fácil ver que $(x-2)(x-3) + (x-3)(x+1) + (x+1)(x-2) = 3(x-\alpha)(x-\beta)$.

Fazendo x = –1, 2 e 3, nesta igualdade, temos que,

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 4$, $(\alpha - 2)(\beta - 2) = -1$, $(\alpha - 3)(\beta - 3) = \frac{4}{3}$.

Com isso, $\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} + \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)} + \frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)} = \frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{4} = 0.$

OPÇÃO A

20) $y = -497x^2 + 1988x - 1987$

$$S = -\frac{B}{A} \rightarrow S = \frac{1988}{497}$$

$$P = \frac{C}{A} \rightarrow P = -\frac{1987}{497}$$

$$X_V = -\frac{B}{2A} = \frac{1988}{994} = 2$$

$Y_V = -497(2)^2 + 1988 \cdot 2 - 1987$

$Y_V = 995$

I) Falso; o valor máximo é 995

II) Verdadeiro; pois o produto é positivo e isso só é possível quando os sinais das raízes são iguais.

III) Falso. Uma vez que o eixo de simetria da parábola passa pelo ponto 2, a distância do ponto 2 até o ponto 107(105 unidades) deve ser a mesma do ponto 2 até o ponto – 130(132 unidades)

IV) Verdadeiro; a interseção com o eixo das ordenadas é o valor de c = – 1987.

OPÇÃO C

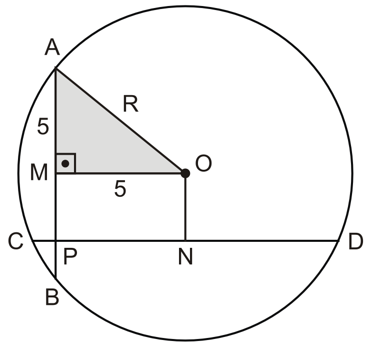
21) Considerando:

O = centro da circunferência,

R = medida do raio,

M = ponto médio de AB e

N = ponto médio de AD



Temos:

$PD \cdot 2 = 6 \cdot 4 \Rightarrow PD = 12$

$$AM = \frac{(6+4)}{2} = 5$$

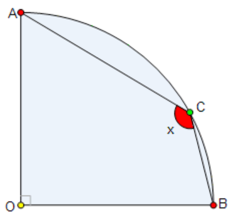
$$OM = \frac{(12+2)}{2} - 2 = 5$$

Logo,

$R^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow R = 5\sqrt{2}.$

OPÇÃO E

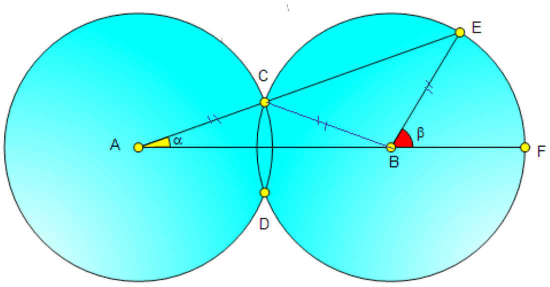
22) Como o arco ACB é igual a 90°, a medida do ângulo x assinalado, vale a metade do replemento do arco ACB.



Ou seja: $x = \dfrac{360 - 90}{2} = 135°$

OPÇÃO D

23) Trace uma linha do ponto B para C.



Triângulo ABC é um triângulo isóscele AC = BC, então ∠CAB = ∠CBA.

∠BCE = 2α.

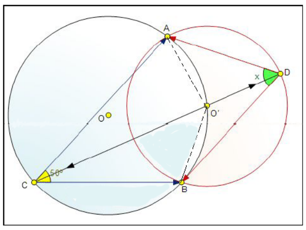
No triângulo ABE se ∠AEB é x então ∠EBF é ângulo externo, então α = α + x

= ∠BCE ∠AEB = 2α então α = α +2α = 3α

OPÇÃO B

24) Como o quadrilátero AO'BC é inscritível, podemos afirmar que a medida do ângulo AO'B = 130°.

O ângulo x que é inscrito, vale a metade do arco AB do circulo menor (130/2) = 65



OPÇÃO D

25) Desde que AB // EM e E é o ponto médio de AD, segue-se que EM é base média do triângulo ABD. Assim, temos $\overline{EM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{1}{2}$.

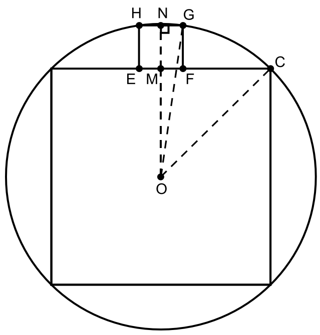
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo DEM, vem

$$\overline{DM}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{DE}^2 \Leftrightarrow \overline{DM}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2$$
$$\Rightarrow \overline{DM} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Por conseguinte, dado que DH é um arco de circunferência com centro em M, encontramos $\overline{EH} = \overline{HM} - \overline{EM} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

OPÇÃO A

26) Considere a figura.



Sejam ℓ e x, respectivamente, os lados dos quadrados ABCD e EFGH.

Sabendo que $\overline{OC} = \overline{OG} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$, vem

$$\ell\sqrt{2} = 2 \cdot \overline{OC} \Leftrightarrow \ell\sqrt{2} = 2 \cdot 2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \ell = 4\,\text{cm}.$$

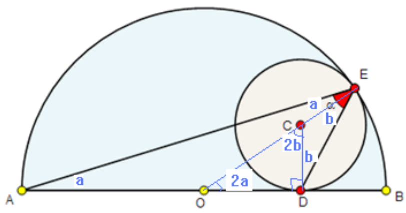
Além disso, temos que $\overline{MO} = \frac{\ell}{2} = \frac{4}{2} = 2\,\text{cm}$ e $\overline{MN} = \overline{FG} = 2 \cdot \overline{NG}$. Portanto, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo GON, encontramos

$$\overline{NG}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{OG}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (x+2)^2 = (2\sqrt{2})^2$$
$$\Leftrightarrow 5x^2 + 16x - 16 = 0$$
$$\Rightarrow x = 0{,}8.$$

OPÇÃO A

27) O ângulo α = a + b.

Observe que os triângulos AOE e CDE são isósceles e o triângulo CDO é retângulo.



Logo, 2a + 2b = 90°. Daí, a + b = 45° = α

OPÇÃO D

28) $\angle DBE = 180° \angle BDE - \angle BED$

$= 180° - 1/2\ (180° - \angle A) - 1/2\ (180° - \angle C)$

$= 180° - 90° + 1/2\ \angle A\ - 90° + 1/2\ \angle C$

$= 1/2\ (\angle A + \angle C)$

$= 1/2\ (180°\ - \angle ABC)$

$= 1/2\ (180° - 90°)$

$= 45°$

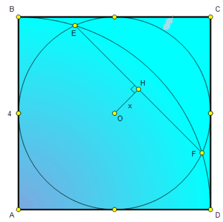
OPÇÃO D

29) OA = R, QA = r

Área de ΔBCD = r(r + 2R) = QA.QB = QE.QF = (3) (8) = 24

OPÇÃO D

30) Observe que OE = OF = 2 e AE = AF = 4.



AC = $4\sqrt{2}$ então AO = $2\sqrt{2}$. se HO = x e FH = a, em seguida,

$4^2 = (2\sqrt{2} + x)^2 + a^2$

$OH = x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

OPÇÃO C